- TD lundi 11 mai

  Cours mardi 12 mai — Pas de cours le 13 mai

- TD lundi 18 mai

  Cours les 19 et 20 mai

<u>Rappel</u> : $H^s(\mathbb{R}^d)$ et $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ $\quad (\langle\xi\rangle^2 = 1+|\xi|^2)$

$$\left\{\begin{array}{l} \|f\|^2_{H^s} := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 \langle\xi\rangle^{2s}\, d\xi \qquad s\in\mathbb{R} \\ \|f\|^2_{\dot{H}^s} := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2\, |\xi|^{2s}\, d\xi \\ (\dot{H}^s : \hat{f}\in L^1_{loc} \text{ et } \|f\|_{\dot{H}^s} < \infty). \end{array}\right.$$

On a vu : si $s < \frac{d}{2}$ alors $\dot{H}^s$ est un espace de Hilbert.

$$\left\{\begin{array}{l} (f_n) \text{ suite de Cauchy de } \dot{H}^s,\ s<\frac{d}{2} \\ \hat{f}_n \longrightarrow g \text{ dans } L^2(|\xi|^{2s}d\xi) \\ \text{et } g\in\mathcal{S}' : \mathbb{1}_{B(0,1)}\, g \in L^1 \quad (s<\frac{d}{2}) \end{array}\right.$$

Suite de la démonstration du théorème : on suppose que $s \geqslant \frac{d}{2}$, montrons que $\dot{H}^s$ n'est pas complet.

Soit
$$N : \begin{array}{rcl} \dot{H}^s & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \|\hat{f}\|_{L^1(B(0,1))} + \|f\|_{\dot{H}^s}. \end{array}$$

Alors N est une norme, et $(\dot{H}^s, N)$ est un espace de Banach, par la démonstration précédente.

Soit $\mathrm{Id} : (\dot{H}^s, N) \longrightarrow (\dot{H}^s, \|\cdot\|_{\dot{H}^s})$
$f \longmapsto f$

alors Id linéaire, continue et bijective. Si $(\dot{H}^s, \|\cdot\|_{\dot{H}^s})$ était un Banach alors il existerait une constante $C>0$ telle que $\forall f \in \dot{H}^s$,

$$N(f) \leq C \|f\|_{\dot{H}^s}.$$

En particulier, $\forall f \in \dot{H}^s$,

$$\|\hat{f}\|_{L^1(B(0,1))} \leq C \|f\|_{\dot{H}^s}.$$

Construisons une suite (f_n) telle que

$$\|\hat{f_n}\|_{L^1(B(0,1))} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$$\text{et } \|f_n\|_{\dot{H}^s} \leq C', \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

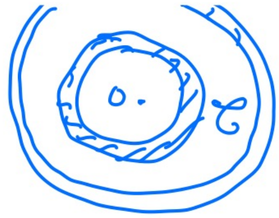
(Théorie de Littlewood-Paley)

découpage dyadique de l'espace des fréquences

$$\hat{f_n}(\xi) = \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{q} 2^{q(s+\frac{d}{2})} \mathbb{1}_{2^{-q}\mathcal{C}}(\xi)$$

où $\mathcal{C}$ est une couronne de $\mathbb{R}^d$ centrée en 0

telle que $\mathcal{C} \cap 2\mathcal{C} = \emptyset$



$$\mathcal{C} = \left\{ \xi \,/\, \frac{1}{4} \leq |\xi| \leq \frac{3}{8} \right\}.$$

1. $$\|\widehat{f_n}\|_{L^1(B(0,1))} = \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{q} 2^{q(s+\frac{d}{2})} \left|2^{-q}\mathcal{C}\right|$$
$$= \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{q} 2^{q(s+\frac{d}{2})} 2^{-qd} |\mathcal{C}|$$
$$= \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{q} 2^{q(s-\frac{d}{2})} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$
$$\left(s \geq \frac{d}{2}\right).$$

2. $$\|f_n\|^2_{\dot{H}^s} = \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{q^2} 2^{2q(s+\frac{d}{2})} \int \mathbb{1}_{2^{-q}\mathcal{C}}(\xi) |\xi|^{2s} d\xi$$
$$+ \sum_{q \neq q'} \int_{2^{-q}\mathcal{C} \cap 2^{-q'}\mathcal{C}} |\xi|^{2s} d\xi \, \frac{1}{qq'} 2^{(q+q')(s+\frac{d}{2})}.$$

Mais si $q \neq q'$ alors $2^{-q}\mathcal{C} \cap 2^{-q'}\mathcal{C} = \emptyset$,

donc $$\|f_n\|^2_{\dot{H}^s} \lesssim C \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{q^2} 2^{2q(s+\frac{d}{2})} \underbrace{2^{-2qs}}_{|\xi|^{2s}} \underbrace{2^{-qd}}_{|2^{-q}\mathcal{C}|}$$
$$\lesssim C'.$$

D'où le théorème. ∎

<u>Proposition</u> :

- $s < t$, $H^t \subset H^s$ avec injection continue ;
$$\|f\|_{H^s} \leq \|f\|_{H} \qquad (\langle \xi \rangle^s \leq \langle \xi \rangle^t)$$

- $r < s < t$ $\quad \dot{H}^r \cap \dot{H}^t \subset \dot{H}^s$, et

$$\|f\|_{\dot{H}^s} \leq \|f\|_{\dot{H}^r}^{\theta} \, \|f\|_{\dot{H}^t}^{1-\theta} \quad , \theta \in]0,1[$$

$$s = (1-\theta)t + \theta r$$

- L'application

$$\begin{aligned} H^{-s} &\longrightarrow (H^s)^* \\ f &\longmapsto L_f : H^s \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad\quad g \longmapsto \int \hat{f}(\xi) \, \overline{\hat{g}(\xi)} \frac{d\xi}{(2\pi)^d} \end{aligned}$$

est un isomorphisme isométrique, $\forall s \in \mathbb{R}$.

De même pour $\dot{H}^s$ à condition que $|s| < \frac{d}{2}$.

(exercice)

PROPOSITION : Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors $H^k(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leq k$, $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

En outre

$$\|f\|_{H^k}^2 \sim \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2$$

(au sens où $\exists C_1, C_2 > 0$ t.q. $\forall f \in H^k(\mathbb{R}^d)$

$$C_1 \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{H^k}^2 \leq C_2 \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2 \quad)$$

$k < d/2$ $\quad \dot{H}^k(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des f t.q. $\hat{f} \in L^1_{loc}$ et $\partial^\alpha f \in L^2$ $\forall |\alpha| = k$

$k \in \mathbb{N}$,

Démonstration : $\boxed{\partial^\alpha f \in L^2 \iff \xi^\alpha \hat{f} \in L^2}$

On conclut par le fait que

$$\langle \xi \rangle^{2k} \sim 1 + \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2 .$$

PROPOSITION : Soit $s \in \mathbb{R}$, $s = k + \sigma$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in]0,1[$. Alors

$$\underbrace{\|f\|_{H^s}^2}_{\langle \xi \rangle^{2s}} \sim \sum_{\underbrace{|\alpha| \leq k}} \|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2 + \sum_{|\alpha| = k} \iint \frac{|\partial^\alpha f(x+y) - \partial^\alpha f(x)|^2}{|y|^{2\sigma + d}} \, dy \, dx$$

Pour démontrer ce résultat il suffit de montrer la proposition suivante.

PROPOSITION : Soit $\sigma \in]0,1[$. Alors $\dot{H}^\sigma \subset L^2_{loc}$ et cette injection est continue ($\dot{H}^\sigma \hookrightarrow L^2_{loc}$) et $\exists C > 0$,

$$\forall f \in \dot{H}^\sigma, \quad \|f\|_{\dot{H}^\sigma}^2 = C \iint \frac{|f(x+y) - f(x)|^2}{|y|^{2\sigma + d}} \, dx \, dy.$$

Démonstration : "basses fréquence" "hauts fréquences"

- $$f = \underbrace{\mathcal{F}^{-1}\big(\underbrace{\hat{f} \mathbb{1}_{B(0,1)}}_{\mathcal{E}'}\big)}_{C^\infty \subset L^2_{loc}} + \underbrace{\mathcal{F}^{-1}\big(\underbrace{\hat{f} \mathbb{1}_{{}^cB(0,1)}}_{\substack{\in L^2 \\ \text{car } \sigma \geq 0}}\big)}_{\in L^2}$$

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\hat{f}|^2 \, d\xi \leq \int_{|\xi|\geq 1} |\xi|^{2\sigma} |\hat{f}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi|^{2\sigma}}$$

$$\leq \|f\|^2_{\dot{H}^\sigma}$$

- $$\int |f(x+y) - f(x)|^2 \, dx = (2\pi)^{-d} \int |\mathcal{F}(f(\cdot+y)) - \mathcal{F}(f)|^2 \, d\xi$$

Mais $\mathcal{F}(f(\cdot+y))(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} f(x+y) \, dx$

$$= \int e^{-i(x+y)\cdot\xi} f(x+y) \, dx \, e^{iy\cdot\xi}$$

$$= e^{iy\cdot\xi} \mathcal{F}f(\xi).$$

Donc

$$\int |f(x+y) - f(x)|^2 dx = (2\pi)^{-d} \int |e^{iy\cdot\xi} - 1|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

Alors

$$\iint \frac{|f(x+y) - f(x)|^2}{|y|^{d+2\sigma}} \, dx dy = (2\pi)^{-d} \int |\hat{f}(\xi)|^2 \left(\int \frac{|e^{iy\cdot\xi} - 1|^2}{|y|^{d+2\sigma}} dy \right) . d\xi$$

Mais $\xi \overset{\Phi}{\longmapsto} \int \frac{|e^{iy\cdot\xi} - 1|^2}{|y|^{d+2\sigma}} dy$ est radiale,

est homogène de degré 2σ. Alors $\exists C$,

telle que $\Phi(\xi) = C|\xi|^{2\sigma}$.

$\left(\Phi(\xi) = \rho(|\xi|) \text{ et } \Phi(\lambda\xi) = \lambda^{2\sigma}\Phi(\xi) \right.$

$\left. \text{donc } \rho(r\lambda) = \lambda^{2\sigma}\rho(r) \text{ puis } r=1 \right).$

D'où $\displaystyle\iint \frac{|f(x+y)-f(x)|^2}{|y|^{d+2\sigma}}\,dy\,dx = C\,\|f\|^2_{\dot H^\sigma}$. ∎

Corollaire : $0 \leq s < k$, $k \in \mathbb{N}$. Soit φ difféo C^k **global** sur $\mathbb{R}^d$. Alors si $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, alors $f \circ \varphi \in H^s(\mathbb{R}^d)$.

$\sigma \geq 1$: au voisinage de 0 $|y|^{-d+2(1-\sigma)}$

PROPOSITION : . $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ $\forall s \in \mathbb{R}$.

. $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d) := \{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \,/\, \hat f = 0$ au voisinage de $0\}$ est dense dans $\dot H^s(\mathbb{R}^d)$ $\forall s < \frac{d}{2}$.

Démonstration :

- Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\int \langle \xi \rangle^{2s} \hat f\, \overline{\hat\varphi}\, d\xi = 0.$$

Alors $\langle \cdot \rangle^{2s} \hat f = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ donc $\hat f = 0$ donc $f = 0$.

- Soit $f \in \dot H^s(\mathbb{R}^d)$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$,

$$\int |\xi|^{2s} \hat f\, \overline{\hat\varphi}\, d\xi = 0.$$

Alors $\hat{f} = 0$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Mais $\hat{f} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ donc $\hat{f} = 0$, d'où $f = 0$.

<u>PROPOSITION</u> : Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ avec $s \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi f \in H^s$ et

$$\|\varphi f\|_{H^s} \leq C(\varphi) \|f\|_{H^s}.$$

<u>Démonstration</u> : $\widehat{\varphi f}(\xi) = (2\pi)^{-d} (\hat{\varphi} * \hat{f})(\xi)$

On veut montrer que $\displaystyle\int \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{\varphi f}(\xi)|^2 \, d\xi \leq C \|f\|^2_{H^s}$.

Calculons $\displaystyle\langle \xi \rangle^{2s} \left| \int \hat{\varphi}(\xi - \eta) \hat{f}(\eta) \, d\eta \right|^2$

On remarque que $\langle \xi \rangle^s \leq C \langle \xi - \eta \rangle^{|s|} \langle \eta \rangle^s$

($s \geq 0$ sinon échange ξ et η dans l'inégalité

$$\langle \xi \rangle^{2s} \leq C (1 + |\xi - \eta|^2 + |\eta|^2)^{s/2} \leq C' \langle \xi - \eta \rangle^{2s} \langle \eta \rangle^{2s}).$$

Alors

$$\int \langle \xi \rangle^{2s} \left| \int \hat{\varphi}(\xi - \eta) \hat{f}(\eta) \, d\eta \right|^2 d\xi =: I$$

$$\leq C \int \left| \int \underbrace{\langle \xi - \eta \rangle^{|s|} \hat{\varphi}(\xi - \eta)}_{F} \underbrace{\langle \eta \rangle^s \hat{f}(\eta)}_{} \, d\eta \right|^2 d\xi.$$

$$\int \left| \int \Phi(\xi-\eta)\, F(\eta)\, d\eta \right|^2 d\xi$$

Mais $\|\Phi * F\|_{L^2} \leq \|\Phi\|_{L^1} \|F\|_{L^2}$

(Young : $\|f_1 * f_2\|_{L^r} \leq \|f_1\|_{L^p} \|f_2\|_{L^q}$

$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$)

Et donc $I \leq C \|\Phi\|_{L^1}^2 \|f\|_{H^s}^2$. ■

" Injections de Sobolev "

<u>Théorème</u> : Soit $s \in \mathbb{R}$, $s > \frac{d}{2} + k$, $k \in \mathbb{N}$

Alors $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte dans $C^k(\mathbb{R}^d)$ et on a $\forall f \in H^s(\mathbb{R}^d)$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \max_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha f(x)| \leq C \|f\|_{H^s}.$$

<u>Démonstration</u> : Soit $|\alpha| \leq k$

On a $\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$.

Donc $$|\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi)| = \underbrace{\frac{|\xi|^{|\alpha|}}{\langle \xi \rangle^s}}_{L^2} \underbrace{\langle \xi \rangle^s \hat{f}(\xi)}_{L^2}$$

car $|\alpha| \leq k < s - \frac{d}{2}$

(donc $|\alpha| - s < -\frac{d}{2}$)

Donc par Cauchy-Schwarz, $\mathcal{F}(\partial^\alpha f) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ si $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, et donc $\partial^\alpha f$ est continue.

Donc si $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, f est de classe C^k.

En outre

$$\partial^\alpha f(x) = (2\pi)^{-d} \int e^{ix\cdot\xi} \mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi)\, d\xi$$

donc $$|\partial^\alpha f(x)| \leq C \int |\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi)| \langle\xi\rangle^s \langle\xi\rangle^{-s} |\xi|^\alpha \, d\xi$$

$$\leq C' \|f\|_{H^s}.$$

<u>Théorème</u> Soit $0 \leq s < \frac{d}{2}$.

Alors $H^s(\mathbb{R}^d)$ et $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ s'injectent continûment dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, avec $s = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$.

$\dot{H}^s \hookrightarrow L^p$

<u>Rq</u> : si $s \geqslant 0$ alors $H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$

donc $H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d)$, $2 \leq q \leq p$.

<u>Démonstration</u> : "Interpolation réelle". $0 < s < \frac{d}{2}$

[J.-Y Chemin C.-J. Xu '99]

Il suffit de démontrer le résultat pour $\dot{H}^s$

(car $H^s \hookrightarrow \dot{H}^s$ si $s \geq 0$).

La valeur de p s'obtient par homogénéité :

supposons que $\|f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{\dot{H}^s}$ $(*)$

Alors soit $f_\lambda(x) := f(\lambda x)$

- $\|f_\lambda\|_{L^p} = \lambda^{-\frac{d}{p}} \|f\|_{L^p}$
- $\|f_\lambda\|_{\dot{H}^s} = \lambda^{s-\frac{d}{2}} \|f\|_{\dot{H}^s}$

Alors $s - \frac{d}{2} = -\frac{d}{p}$.

Par densité, on peut montrer $(*)$ pour $f \in \mathcal{S}_0$,

et on suppose que $\|f\|_{\dot{H}^s} = 1$.

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty \Lambda^{p-1} \left| \{x \,/\, |f(x)| > \Lambda\} \right| d\Lambda$$

(en effet $\|f\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \, dx = p \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{|f(x)|} \Lambda^{p-1} \, d\Lambda \, dx$

puis Fubini)

Soit $\Lambda > 0$, on pose

$$f_b := \mathcal{F}^{-1}\left(\mathbb{1}_{|\xi| \leq A_\Lambda} \hat{f}\right)$$ avec A_Λ à déterminer

$$f_\# = f - f_b.$$

Alors $\{x / |f(x)| > \Lambda\} \subset \{x / |f_b(x)| > \frac{\Lambda}{2}\}$
$\cup \{x / |f_\#(x)| > \frac{\Lambda}{2}\}$

$$\begin{aligned}
\|f_b\|_{L^\infty} &\leq (2\pi)^{-d} \|\hat{f}_b\|_{L^1} \\
&\leq (2\pi)^{-d} \int_{|\xi| \leq A_\Lambda} |\hat{f}| \, d\xi. \\
&\leq (2\pi)^{-d} \int_{|\xi| \leq A_\Lambda} |\xi|^{-s} \underbrace{|\xi|^s |\hat{f}(\xi)|}_{L^2} d\xi \\
&\leq (2\pi)^{-d} \|f\|_{\dot{H}^s} \left(\int_{|\xi| \leq A_\Lambda} \frac{d\xi}{|\xi|^{2s}} \right)^{1/2} \\
&\leq K \, A_\Lambda^{\frac{d}{2}-s} \underbrace{\|f\|_{\dot{H}^s}}_{=1}.
\end{aligned}$$

On choisit A_Λ de sorte que $\|f_b\|_{L^\infty} \leq \frac{\Lambda}{4}$:

$$A_\Lambda^{\frac{d}{2}-s} = K^{-1}\frac{\Lambda}{4}$$

Alors

$$\|f\|_{L^p}^p \leq p\int_0^\infty \Lambda^{p-1} \left|\{x / |f_\#(x)| > \tfrac{\Lambda}{2}\}\right| d\Lambda .$$

$$\leq p\int_0^\infty \Lambda^{p-1} \times \frac{4}{\Lambda^2} \int |f_\#(x)|^2 dx \, d\Lambda$$

$\|f_\#\|_{L^2} = c\|\hat{f}_\#\|_{L^2}$

(par Bienaymé-Tchebychev).

$$\leq C\int_0^\infty \Lambda^{p-3} \int |\hat{f}_\#(\xi)|^2 d\xi \, d\Lambda$$

$$\leq C\int_0^\infty \Lambda^{p-3} \int_{|\xi|^{\frac{d}{2}-s} \geq A_\Lambda^{\frac{d}{2}-s}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \, d\Lambda$$ Fubini

$$\leq C\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 \int_0^{4K|\xi|^{\frac{d}{2}-s}} \Lambda^{p-3} d\Lambda \, d\xi$$

$$\leq C' \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 \, |\xi|^{(\frac{d}{2}-s)(p-2)} d\xi$$

Mais $(\frac{d}{2}-s)(p-2) = 2s$

(en effet $s = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$).

D'où $\quad \|f\|_{L^p}^p \leq C \|f\|_{\dot{H}^s}^2 = C$. ∎

<u>Théorème</u> : Soit $d \geq 2$, et $s > \frac{1}{2}$. L'application de "trace" $\gamma : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$

$$f \longmapsto \gamma(f)$$

où $\gamma(f)(x_1, \dots, x_{d-1}) = f(x_1, \dots, x_{d-1}, 0)$, se prolonge en une application linéaire surjective de $H^s(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$. Il existe une application linéaire continue R ("de relèvement") de $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\gamma \circ R = \mathrm{Id}_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})}.$$

<u>Démonstration</u> : Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, il s'agit de montrer que

$$\|\gamma(f)\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$$

(avec C indépendante de f).

$$\|\gamma(f)\|_{H^{s-\frac{1}{2}}}^2 = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \langle \xi' \rangle^{2s-1} |\mathcal{F}(\gamma(f))|^2 \, d\xi'.$$

où $x' = (x_1, .., x_{d-1})$ et $\xi' = (\xi_1, .., \xi_{d-1})$. Mais

$$\gamma(f)(x') = f(x', 0)$$

$$= (2\pi)^{-d} \int e^{ix'\cdot\xi'} \mathcal{F}f(\xi)\, d\xi$$

$$= (2\pi)^{-(d-1)} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{ix'\cdot\xi'} \left((2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\xi)\, d\xi_d \right) d\xi'$$

donc $\mathcal{F}(\gamma(f))(\xi') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\xi)\, d\xi_d$.

D'où

$$\|\gamma(f)\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}} \leq C \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \langle \xi' \rangle^{2s-1} \left| \int \mathcal{F}f(\xi)\, d\xi_d \right|^2 d\xi'$$

$(H^s \hookrightarrow C^0 \quad s > \frac{d}{2})$

$$\leq C \int \langle \xi' \rangle^{2s-1} \left| \int |\hat{f}(\xi)| \langle \xi \rangle^s \frac{d\xi_d}{\langle \xi \rangle^s} \right|^2 d\xi'$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \langle \xi' \rangle^{2s-1} \left(\int |\hat{f}(\xi)|^2 \langle \xi \rangle^{2s} d\xi_d \right) \left(\int \frac{d\xi_d}{\langle \xi \rangle^{2s}} \right) d\xi'$$

Mais $$\int \frac{d\xi_d}{\langle \xi \rangle^{2s}} = \int \frac{d\xi_d}{(1 + |\xi'|^2 + \xi_d^2)^s}$$

$$= \frac{1}{\langle \xi' \rangle^{2s}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_d}{\left(1 + \frac{\xi_d^2}{1+|\xi'|^2}\right)^s}$$

$$= \langle \xi' \rangle^{-2s+1} \int \frac{dt}{(1+t^2)^s} .$$

$s > \frac{1}{2}$

Finalement

$$\|\gamma(f)\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{d-1})} \leq C \int |\hat{f}(\xi)|^2 \langle \xi \rangle^{2s} d\xi$$

$$\leq C \|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} .$$

D'où le premier résultat.

Construisons une application linéaire R qui convient :

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$. On veut construire $R\varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et tel que

$\left(\cancel{R\varphi(x) = \varphi(x') \times \chi(x_d)}\right)$

- $\gamma \circ R\varphi = \varphi$.
- $\|R\varphi\|_{H^s} \leq C \|\varphi\|_{H^{s-\frac{1}{2}}}$.

On pose, pour $x \in \mathbb{R}^d$

$$R\varphi(x) := \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int \hat{\varphi}(\xi') e^{ix'\cdot\xi'} \chi(x_d \langle \xi' \rangle) d\xi'$$

où $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\chi(0) = 1$.

Alors $\gamma \circ R\varphi = \varphi$.

$$\left(\underset{\text{dans } \mathbb{R}}{\mathcal{F}(\chi(\lambda \cdot))} = \frac{1}{\lambda} \hat{\chi}\left(\frac{\cdot}{\lambda}\right)\right)$$

$$\mathcal{F}(R\varphi)(\xi) = \hat{\varphi}(\xi')\, \hat{\chi}\left(\frac{\xi_d}{\langle \xi' \rangle}\right) \frac{1}{\langle \xi' \rangle}.$$

Alors

$$\|R\varphi\|^2_{H^s} = \int \langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi' \rangle^{-2} |\hat{\varphi}(\xi')|^2 \left|\hat{\chi}\left(\frac{\xi_d}{\langle \xi' \rangle}\right)\right|^2 d\xi$$

$$\leq \int |\hat{\varphi}(\xi')|^2 \langle \xi' \rangle^{2(s-\frac{1}{2})}$$

$$\times \int \langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi' \rangle^{-2s+1} \langle \xi' \rangle^{-2} \left|\hat{\chi}\left(\frac{\xi_d}{\langle \xi' \rangle}\right)\right|^2 d\xi_d \, d\xi'$$

Mais $\displaystyle\int \langle \xi \rangle^{2s} \left|\hat{\chi}\left(\frac{\xi_d}{\langle \xi' \rangle}\right)\right|^2 d\xi_d$

$$= \int (\langle \xi' \rangle^2 + \xi_d^2)^s \left|\hat{\chi}\left(\frac{\xi_d}{\langle \xi' \rangle}\right)\right|^2 d\xi_d$$

$$\leq \langle \xi' \rangle^{2s+1} \underbrace{\int (1+t^2) |\hat{\chi}(t)|^2 dt}_{C}$$

D'où $\|R\varphi\|^2_{H^s} \leq C \|\varphi\|^2_{H^{s-\frac{1}{2}}}$.

D'où le théorème. ☒

CAS D'UN DOMAINE BORNÉ

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert.

DÉFINITION : On définit l'espace $H^1(\Omega)$ comme l'espace des fonctions $f \in L^2(\Omega)$ telles que $\nabla f \in L^2(\Omega)$. On le munit de la norme

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} := \|f\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{d} \|\partial_j f\|_{L^2(\Omega)}$$

On définit $H^1_0(\Omega)$ comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $H^1(\Omega)$.

Théorème (Rellich-Kondrachov) :

Soit Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, à bord C^1. Alors toute partie bornée de $H^1_0(\Omega)$ est d'adhérence compacte dans $L^2(\Omega)$.